

Les boucles étranges

Introduction au maniement de la surface de Boy

L'universitaire américain **Douglas Hofstadter** est surtout connu pour son ouvrage *Gödel, Escher, Bach, les brins d'une guirlande éternelle*, publié en 1979, et qui obtint le Prix Pulitzer en 1980. Ce livre, dont le titre est souvent abrégé en « GEB », a inspiré des milliers d'étudiants à se lancer dans une carrière dans les domaines de l'informatique et de l'intelligence artificielle. L'ouvrage décrit de quelle façon les réalisations du logicien Kurt Gödel, de l'artiste Maurits Cornelis Escher et du compositeur Johann Sebastian Bach en viennent à s'entrelacer du fait de l'existence d'une structure commune. Hofstadter le précise : « Je me suis rendu compte que Gödel, Escher et Bach n'étaient que des ombres projetées dans différentes directions par une essence centrale. J'ai essayé de reconstruire cet objet central ».

L'auteur y décrit une série de mécanismes d'**auto-référence**, c'est à dire la propriété, pour un système, de faire référence à lui-même. La référence est possible lorsqu'on est en présence de deux niveaux logiques : un niveau et un méta-niveau. Ces mécanismes sont relevés dans le domaine de la logique, particulièrement avec le théorème d'incomplétude de Kurt Gödel, dans celui de l'art avec les réalisations « en boucle » d'Escher, dans celui de la musique enfin avec les compositions « en canon » typiques de l'œuvre de Bach.

D'un point de vue lacanien, nous dirons qu'il y a là une intuition certaine, qui entraîne immédiatement la levée d'un certain nombre de concepts qui font défaut à l'auteur. L'idée d'une structure qui se décline sur différents modes ne nous est pas étrangère, de même que l'accent mis sur la preuve de l'incomplétude du symbolique (A barré dans l'enseignement de Lacan). De plus, l'agencement des brins de cette guirlande éternelle semble évoquer une surface topologique qui concerne de près la psychanalyse, celle de la bande de Möbius. Qu'il nous soit cependant permis d'opérer une substitution : nous verrions fort bien Lacan lui-même figurer dans cette liste de créateurs, à la place de Bach dont l'œuvre, géniale au demeurant, ne vient illustrer selon nous qu'une frange de la structure mise en avant par Hofstadter.

Nous aurions alors trois pôles fondamentaux dont nous allons voir qu'ils se superposent parfaitement à la construction développée dans le chapitre précédant. Gödel produit en effet un montage qui, en jouant sur une certaine articulation des propositions de la logique et de la théorie des nombres, débouche sur l'évidence d'un réel de type paradoxal. Escher, de son côté, en jouant sur des chaînes de motifs dans un cadre auto-référentiel ou fractal, en vient à présenter un autre réel : celui du paradoxe de l'irreprésentable. Lacan enfin, par la mise en évidence d'une topologie propre au sujet de l'inconscient, portant pour une part sur les effets de continuité ou de coupure des chaînes signifiantes, isole l'importance de l'espace de la bande Möbius en psychanalyse.

Ne congédions cependant pas trop vite Bach et ses précieux canons, qui démontrent qu'il avait en effet senti le parti à prendre de l'espace möbien en musique. Bien avant que [Möbius](#) ne découvre son célèbre ruban, J.S.Bach écrivait l'énigmatique Canon 1 à 2 de l'"Offrande musicale" sous la forme d'une seule portée dont le début est joint avec la fin après retournement¹ :

¹ Cela a inspiré une jolie animation à [Jos Leys](http://www.josleys.com/), visible sur <http://www.josleys.com/>



La seule raison pour laquelle nous ne ferons pas ici plus de commentaires sur la musique de Bach, certainement au grand dam de Douglas Hofstadter, est que son œuvre, aussi géniale soit-elle, ne débouche pas sur l'évidence d'un point d'impossible ou d'incomplétude, ceci à la différence des trois autres auteurs.

Nous souhaitons en effet montrer que la torsion möbienne a partie liée avec l'existence d'une zone limite qui fait paradoxe au regard des catégories ordinaires environnantes. Il y a peut-être là une nouvelle façon d'approcher ces zones de Réel mises en évidence dans le chapitre précédent. Pour y parvenir, choisissons de mettre provisoirement de côté le modèle fractal, et de mettre en avant la topologie des surfaces. Nous verrons ensuite qu'il existe des ponts entre les deux modèles.

Plus de vingt-cinq ans après la publication de *GEB*, D. Hofstadter développe dans un nouvel ouvrage, *Je suis une boucle étrange*¹, la question de la genèse du « Je ». L'auteur ne possède aucun repérage psychanalytique, et ne fait donc pas la distinction entre le sujet, le Moi et la conscience. Toutefois, on ne peut qu'être saisi par les intuitions éclairantes dont il fait preuve dès l'instant où l'on substitue le mot « sujet » à celui de « Je » dans son ouvrage.

L'auteur ouvre la réflexion en décrivant deux phénomènes courants de rétroaction, celui du feedback audio (connu comme effet Larsen) et celui du feedback vidéo. Le premier a trait à ce sifflement inaudible qui se produit lorsque le micro se trouve placé trop près des enceintes acoustiques : le son amplifié est capté par le micro et ressort encore plus fort avant d'être à nouveau capté par ce micro, ainsi de suite. A partir d'un certain moment, ce cercle vicieux donne lieu à un sifflement suraigu insupportable pour l'auditoire. L'amplification infinie qui devrait résulter du phénomène est cependant rendue impossible du fait que l'amplificateur atteint un état de saturation, une valeur limite où le son sortant a la même intensité sonore que le son entrant. Le système se stabilise autour d'une certaine fréquence de résonance du système.

Le feedback vidéo résulte du pointage de la caméra sur l'écran auquel elle est connectée. Notons que ce geste ne s'effectue pas facilement, il existe une sorte de méfiance qui nous fait craindre une détérioration du matériel. Il n'y a cependant aucun danger à explorer un feedback vidéo ordinaire dans la mesure où les caméras ne sont pas des amplificateurs de l'intensité lumineuse. Il n'existe donc pas de risque de voir des pixels de l'écran devenir de plus en plus brillants jusqu'à ce que l'écran fonde. Pour Hofstadter, une partie de l'explication tient au fait que se représenter soi-même est mal vu : « c'est bizarre, voire fatal. La crainte des boucles semble faire partie de notre humaine étoffe »¹.

¹ Editions Dunod, 2008

¹ op. cit. , p. 71

Le dispositif permet en tout cas d'effectuer de véritables explorations d'images auto-référentes. Un couloir central apparaît généralement à l'écran, qui semble se rétrécir à l'infini. Mais d'infimes variations obtenues à partir du maniement de la caméra donnent lieu à la vision de paysages vidéo variés et surprenants. Avec certains angles de prise de vue, on obtient par exemple une spirale plate ressemblant à une galaxie munie d'un trou noir central. L'on peut aussi assister, en faisant jouer sa propre main entre caméra et écran, à des pulsations de motifs.

La richesse des motifs obtenus n'est pas sans faire penser à l'univers découvert par Mandelbrot dans les années 1980, à partir des propriétés fractales. Il s'agit là aussi de boucles rétroactives. Ainsi, la simple itération de la fonction $z \rightarrow z^2 + c$, où c est un nombre complexe donné, donne lieu à la génération d'images spectaculaires qui présentent la particularité d'être self-similaires, c'est à dire qu'elles ont même structure quelle que soit l'échelle à laquelle on les regarde (homothétie interne)².

Toutefois, ce que Hopstadter désigne par « boucle étrange » est autre chose que la simple boucle de rétroaction. Il s'agit plutôt d'une boucle abstraite dans laquelle, au terme d'un cheminement circulaire, on passe d'un niveau d'abstraction à un autre, donnant l'impression de grimper dans une hiérarchie. Une boucle étrange est une boucle en feedback paradoxale dans laquelle les niveaux s'entrecroisent.

Un exemple classique est la lithographie de M.C. Escher *Drawing Hands*, dans laquelle une main dessine l'autre dans un cercle infernal :

« Ici, le déplacement abstrait d'un niveau à un autre serait le saut vers le haut de *dessiné* à *dessinant* (ou, de manière équivalente, d'*image* à *artiste*), ce dernier niveau étant intuitivement « au-dessus » du premier, dans plusieurs acceptions de cette expression »³.

La structure abstraite de *Drawing Hands* pourrait constituer un parfait exemple de boucle étrange. Pourtant, elle repose sur un trucage, et résulte d'un artifice dû au talent du dessinateur. Escher a le mérite de nous mettre sur la trace d'une structure paradoxale profonde, mais il le fait avec les moyens de la représentation picturale.

C'est du côté des mathématiques qu'il nous faut nous tourner pour isoler une boucle qui réponde parfaitement aux attentes de Hofstadter. Cette boucle, c'est celle que découvre le jeune logicien viennois Kurt Gödel en 1930, et qui lui permet de poser son théorème d'incomplétude. L'étonnant est qu'il l'a déniché au sein de l'austère théorie des types de Bertrand Russell, censée être à l'épreuve des paradoxes.

Rappelons en quelques mots que l'entreprise russellienne consiste à se doter de règles précises pour éviter un certain nombre de paradoxes de la théorie des ensembles, du type : l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-mêmes se contient-il ou non ? La réponse à cette question est indécidable. Russell, dans son ouvrage *Principia Mathematica*, propose des règles strictes pour éviter qu'un ensemble puisse se contenir ou qu'une proposition puisse se prendre elle-même pour objet. Par ailleurs, il introduit un système formel pour raisonner sur les ensembles, un ensemble de règles précises de manipulation de symboles. Il est important de noter que chaque règle d'inférence ne se contente pas de conduire à de nouvelles formules à partir d'une ou de plusieurs antérieures : cela se fait de façon purement typographique, c'est-à-dire via des manipulations mécaniques de symboles. Mais chaque règle doit être soigneusement pesée pour qu'à partir de formules exprimant des vérités sorte une formule qui en fasse autant.

Dès lors, on peut manipuler les symboles logiques sans se préoccuper de leur signification, tout en étant certain d'obtenir quelque chose de vrai. Russell, dans sa

² par itération, on entend le fait de faire indéfiniment entrer dans l'algorithme le résultat du calcul précédent. Nous avons donc un processus en boucle. Les images sont obtenues à partir de tous les points générés par la variation de c

³ op. cit., p. 130

collaboration avec Whitehead, a donc développé le vieux rêve d'un raisonnement totalement mécanisé.

L'idée de Gödel, qui avait au départ un profond respect pour la puissance du formalisme de Russell, a été de penser que les motifs typographiques de symboles des *Principia Mathematica* pouvaient bien avoir une parfaite « image en miroir » dans le monde de la théorie des nombres. Dès lors, il s'est employé à transformer systématiquement des chaînes quelconques de symboles russelliens (correspondant à des propositions vraies ou fausses) en des entiers positifs. Réciproquement, ces entiers devaient pouvoir être « décodés » pour redonner les chaînes dont ils étaient issus. Pour le détail de cette traduction, nous renvoyons le lecteur au chapitre IV, qui traite de cette question spécifiquement.

La pointe du raisonnement gödélien porte bien entendu dans la coïncidence brutale entre une proposition apparemment innocente comme « une certaine formule f n'est pas prouvable dans le système » et le fait que ce soit précisément le nombre f qui la code. On a donc ici affaire à une formule contenant directement son propre nombre de Gödel. Délice de l'auto-référence. Comme le suggère Hofstadter, le système des *Principia* semble se retourner lui-même pour se contempler.

La faille que découvre Gödel, à savoir que vérité et prouvabilité sont à jamais disjointes, est à concevoir à tous les niveaux. Le fait de doper le système des *Principia* ne changerait rien : les mêmes étapes du raisonnement gödélien conduiraient le nouveau système prétendument plus puissant à succomber sous les affres de l'incomplétude.

Parvenu à ce point, il nous paraît bon de relever une remarque faite par Hofstadter, en cohérence avec la thèse de son ouvrage, à savoir que les traductions les plus concises de la formule de Gödel emploient le mot « Je » (« Je ne suis pas démontrable dans le système » ou « Je ne suis pas un théorème du système ») : « Ce n'est pas un hasard. En fait, cette manière informelle, quasi détachée, d'employer le pronom de la première personne du singulier nous ramène à ce que nous avons entrevu une première fois : le lien profond entre l'austère boucle mathématique de Gödel et la notion profondément humaine de la conscience de soi ».

L'étrangeté de la boucle est due à un enroulement inattendu qui semble violer ce que nous considérons comme un ordre hiérarchique immuable. L'exploit de Gödel est en fait rendu possible par le fait que les entiers positifs constituent un mode de représentation fabuleusement riche. Ils peuvent reproduire ou imiter n'importe quelle structure. Les débuts de la science moderne coïncident d'ailleurs avec cette intuition, et il n'est pas inutile de citer à nouveau la fameuse phrase de Galilée : « Le grand livre de la nature est écrit en langage mathématique ». La mathématisation de la Nature passe par le maniement du nombre. Gödel semble par contre être le premier à s'être rendu compte que les mathématiques pouvaient également modéliser la pratique des mathématiques elle-même. En tout cas, le retournement autoréférentiel qu'il décèle au sein des *Principia* procède inéluctablement du profond pouvoir représentatif des nombres entiers.

Il existe donc une sorte de causalité inversée dans les boucles de ce type. Gödel n'est d'ailleurs pas le seul à avoir mis ce phénomène paradoxal en évidence. On peut considérer que Alan Turing et, plus récemment Grégory Chaitin, ont montré d'autres boucles étranges dans une nouvelle branche des mathématiques : la théorie algorithmique de l'information. Toutefois, une prise de recul permet de repérer que nous avons affaire partout au même phénomène, à savoir qu'un système consistant (suffisamment complexe) est nécessairement incomplet. Inversement, on doit pouvoir dire qu'un système véritablement complet est nécessairement inconsistant, et présente donc des contradictions.

Il existe une théorie de la genèse du sujet chez Hofstadter, qui repose sur le type de boucle que nous venons de présenter :

« Tout comme la richesse des nombres entiers donne à PM (partie algorithmique des *Principia Mathematica*) le pouvoir de représenter des phénomènes d'une infinie complexité,

donc de se retourner sur lui-même et de s'engloutir via la construction de Gödel, notre répertoire extensible de symboles donne à notre cerveau le pouvoir de représenter des phénomènes d'une infinie complexité, donc de se retourner sur lui-même et de s'engloutir via une boucle étrange »¹.

Dès lors, le verrouillage du symbole « Je » finirait par s'installer au fil des ans dans la boucle de feedback mais, par causalité inversée, c'est le « Je » lui-même qui nous semblerait aux commandes depuis toujours. Nous partirions donc d'une simple boucle de rétroaction qui, en se complexifiant, finirait inéluctablement par entraîner une entité émergente exerçant une causalité inversée sur le monde, laquelle se verrouillerait toujours davantage.

Toutefois, Hofstadter précise aussitôt que ce « Je » est à concevoir comme une illusion formidablement efficace. Du reste, nos « Je » seraient des mirages qui se renforceraient eux-mêmes toujours plus comme sous-produits inéluctables de boucles étranges. Ce serait l'humaine condition que de croire à ce mythe, et de devoir faire avec.

Lacan pense également que le sujet est une fiction, et qu'il se déduit logiquement d'intervalles de signifiants. Cela se fait sur ce modèle de proposition : « Je ne suis pas démontrable dans le système », comme s'expriment les logiciens. Nous disons plutôt : « Je est représenté par un signifiant pour un autre signifiant ».

Hofstadter a l'immense mérite de mettre l'accent sur l'autonomie du signifiant, c'est-à-dire sur l'importance des chaînes signifiantes du langage qui nous déterminent culturellement, mais aussi comme sujets individuels. Il ne cesse d'insister sur l'épaisseur du langage, d'où la production chez lui d'impressionnantes listes de signifiants dont il montre tout le poids de détermination pour le sujet.

Or, nous savons avec Lacan que le maillage des signifiants, la texture qui leur est propre, s'appuie largement sur la topologie des surfaces et des nœuds. La surface möbienne est notamment privilégiée, celle dont le parangon est la fameuse bande de Möbius.

Une question vient alors à l'esprit : pourrait-on dire que Gödel construit sa preuve à partir d'un modèle möbien ? N'y a-t-il pas continuité, dans la méthode qu'il propose, entre une face sur laquelle se trouvent les symboles logiques PM et une face sur laquelle se trouve l'articulation numérique en terme de *nombres de Gödel*. Il y aurait localement opposition face à face, mais continuité « horizontale » entre ces deux faces. La trouvaille de Gödel aurait alors consisté à percer, en quelque sorte, la surface pour mettre directement en contact les deux faces de la bande, d'où l'émergence du paradoxe. Le paradoxe serait alors que toute surface möbienne donne lieu à un point de l'espace véritablement impossible (le point à l'infini que représente le cœur de la surface) : c'est sur quoi Gödel aurait débouché avec sa méthode.

Dans ces conditions, n'y aurait-il pas lieu de différencier le cas de la simple boucle feedback, dont le support topologique serait une bande bilatère fermée sur elle-même (comme un bracelet à deux faces), de la véritable boucle étrange dont le support serait la bande unilatère de Möbius ? En effet, dans les boucles de feedback classiques (audio, vidéo, formules fractales), les données issues du système sont réintroduites dans celui-ci ; dans certains cas, cela donne lieu à des phénomènes chaotiques et à l'émergence d'une fractalité. Par contre, lorsque les données issues du système deviennent agissantes sur le système lui-même, nous sommes tout à fait dans le cadre de la boucle étrange : il y a mise en continuité d'un niveau logique avec un autre plus abstrait. La bande de Möbius rend merveilleusement compte de cela.

Que les deux faces du ruban soient en continuité l'une avec l'autre équivaut à l'aliénation fondamentale du sujet de l'inconscient et au fait que, selon Freud, l'inconscient ne connaît pas la contradiction. La bande de Möbius est représentative de la division subjective entre conscient et

¹ op. cit. , p. 269

inconscient. Le discours inconscient est en continuité avec le discours conscient, mais il se trouve sur une face inaccessible à un moment donné. Plus exactement pour Lacan, le sujet est à entendre comme coupure de la bande de Möbius : il s'agit d'une opération qui change irrémédiablement la topologie de la surface. Une coupure centrale sur la bande möbienne produit une bande à deux faces séparées par deux bords, mais doublement torsadée (quatre demi-torsions pour être précis).

L'opération de Gödel pourrait être de cet ordre : non pas perçage de la bande, mais plutôt coupure longitudinale qui fait émerger le paradoxe.

Cette coupure est cependant l'opération inverse de ce qu'on appelle le *recollement* de la bande de Möbius. En effet, en partant de notre bande bilatère à quatre demi-torsions, il est parfaitement possible de recomposer la bande möbienne par pliage de la bande et collage sur elle-même. Qu'il nous soit possible ici de suggérer qu'il y a là un modèle particulièrement adapté à servir de support, voire d'étayage, au dispositif que Gödel met en place. En effet, s'il y a équivalence entre les propositions logiques de l'arithmétique et une série de nombres, imaginons qu'elles figurent comme avers et envers de notre fameuse bande bilatère. Pour chaque proposition sur une face, il existe un nombre décomposable sur l'autre face, juste à l'opposé.

Pratiquons maintenant un recollement de nos deux feuillets et observons ce qui se passe. Il n'existe plus qu'une face en continu, mais celle-ci comporte une partie que nous allons appeler *haute* et une partie *basse*. Sur la haute figure la règle logique, sur la basse figurent les nombres dont nous dirons qu'ils sont arguments de la règle considérée. Dans le même temps, l'envers de la règle dans la partie haute (c'est à dire ce qui se trouve derrière cette partie haute) est tenu par le nombre qui identifie de manière unique cette règle. Or, ce que Gödel découvre, presque par hasard dit-il, c'est que l'argument est égal au nombre unique qui représente la règle considérée.

Certes, pour que cette opération soit réalisable, il faut que le nombre figure deux fois dans la liste des nombres de Gödel. Mais il n'est pas nécessaire qu'ils aient la même forme : comme nous le suggère Hofstadter, l'écriture de ce nombre peut prendre une forme extrêmement synthétique. Par exemple, « L'astuce vient du fait que certains nombres énormes ont une description très brève (387 420 489 peut être décrit en seulement cinq syllabes : « neuf puissance neuf ») »¹.

Les derniers travaux de Gödel, dans sa collaboration avec Einstein à *Princeton University*, concernent justement la topologie de l'espace-temps : que peut signifier une ligne d'univers fermée dans l'espace-temps ? Il montre qu'une telle ligne est une trajectoire où l'on revient au point initial, c'est à dire non seulement aux coordonnées spatiales initiales, mais à la coordonnée temporelle initiale. Ce bouclage topologique n'est pas sans évoquer pour nous les monstrations lacaniennes de tracés de lignes sur la surface de supports topologiques comme le tore, la bande de Möbius ou le cross-cap. Ce n'est donc pas un des moindres arguments de notre thèse, à savoir que le raisonnement gödelien repose sur un support möbien, que de voir se confirmer jusqu'au bout l'intérêt du découvreur de l'incomplétude des systèmes pour les surfaces topologiques.

Quelle que soit la pertinence du modèle que nous venons d'exposer, l'acte du sujet Gödel, qu'il se fonde d'une coupure ou d'un recollement, a en tout cas pour effet de nous révéler l'incomplétude des systèmes formels, et au-delà, du Symbolique lui-même.

Le problème de la texture du Symbolique nous ramène aux avancées topologiques de Lacan. En effet, celui-ci appuie deux lois fondamentales du signifiant sur la bande de Möbius : « un signifiant ne saurait se signifier lui-même » et « un signifiant représente un sujet pour un autre signifiant ». Suivons le commentaire qu'en fait la psychanalyste Jeanne Granon-Lafont :

¹ D. Hofstadter, op. cit., p. 180

« Localement, à chaque instant du parcours de la bande, il y a deux faces repérables. Dans cette mesure, le signifiant et le signifié s'opposent, mais en fait, leur différence ne s'appuie que sur un facteur temporel. [...]. Le signifié n'en finit pas de glisser à l'envers et au bout du compte, une fois qu'un tour complet a été effectué, c'est un autre signifiant, sur l'endroit cette fois, qui vient définir le premier. Un signifiant ne renvoie jamais qu'à un autre signifiant, il représente un sujet pour un autre signifiant»¹.

Pour un sujet parlant, toute tentative de collage d'un signifiant à un signifié échoue inévitablement : le mot se répète, la boucle se referme sur elle-même, mais il subsiste toujours entre les deux entités l'espace d'une bande de Möbius, c'est à dire un point d'impossible, un vide impensable. Il s'agit là d'une propriété fondamentale du langage humain dans la mesure où toute signification est marquée par le vide qu'elle enferme. L'acte de coupure sur la bande de Möbius a pour effet de décoller le signifiant du signifié, et fait apparaître la chaîne signifiante en tant qu'elle enferme un vide, celui où se loge le désir pour Lacan.

L'opération n'est possible que dans le champ de la mathématique, là où $a = a$. Mais dans ce cas, tout effet de sujet se trouve congédié : le sujet n'y est plus, d'où le drame humain qu'ont pu connaître les grands découvreurs en logique mathématique qu'ont été un Cantor ou un Gödel.

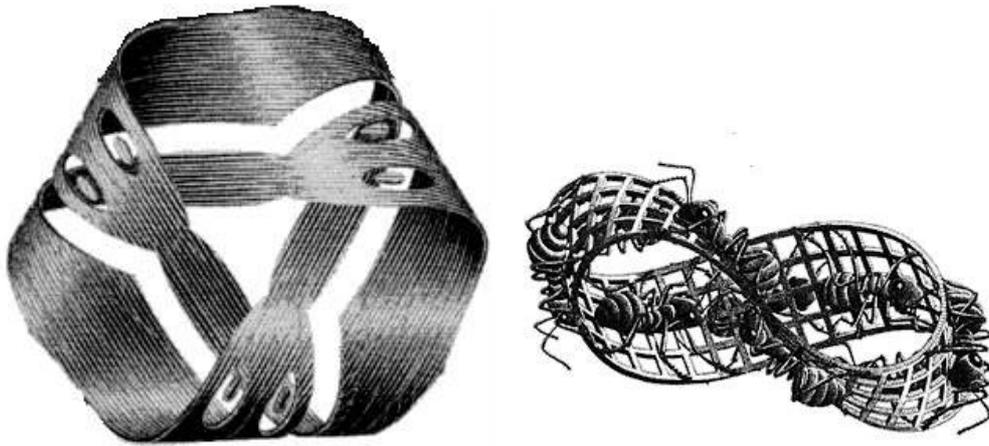
On peut donner à la bande de Möbius, dans notre espace à trois dimensions, le statut de représentant de l'irreprésentable, et la fonction *sujet* s'y trouve appendue. En ce sens, le « Je », au sens de Hofstadter, relève bien d'une boucle étrange. C'est encore ce que Lacan soulignera dans son modèle de coupure du *cross-cap*, une des variétés topologiques du plan projectif : un double tour de coupure autour d'une des deux singularités de la figure entraîne la séparation de l'ensemble en deux morceaux, l'un étant l'équivalent d'un disque bilatère, l'autre une bande de Möbius à trois demi-tours. Le *cross-cap* vient là supporter ce qu'il en est du fantasme fondamental : une liaison entre l'objet *a* (objet-cause du désir) figuré par le disque, et le sujet figuré par la bande unilatère.

Le support möbien, qui n'est pas seulement chez Lacan un modèle mais la structure elle-même, concerne une dialectique entre signifiants et signifiés d'où le sujet se déduit. Il y a une contorsion nécessaire du langage dans la production de l'effet de sujet. Dit encore autrement, l'*effet sujet* du langage se réalise quand le langage se réfère à lui-même.

Il existe quelque chose de cet ordre dans les tableaux et gravures de l'artiste Escher. Des chaînes de figures en viennent à se boucler sur un mode paradoxal. Il s'agit d'ailleurs souvent d'authentiques boucles étranges dans la mesure où il existe un saut de niveau d'abstraction entre les tours successifs que l'on réalise en suivant le tracé.

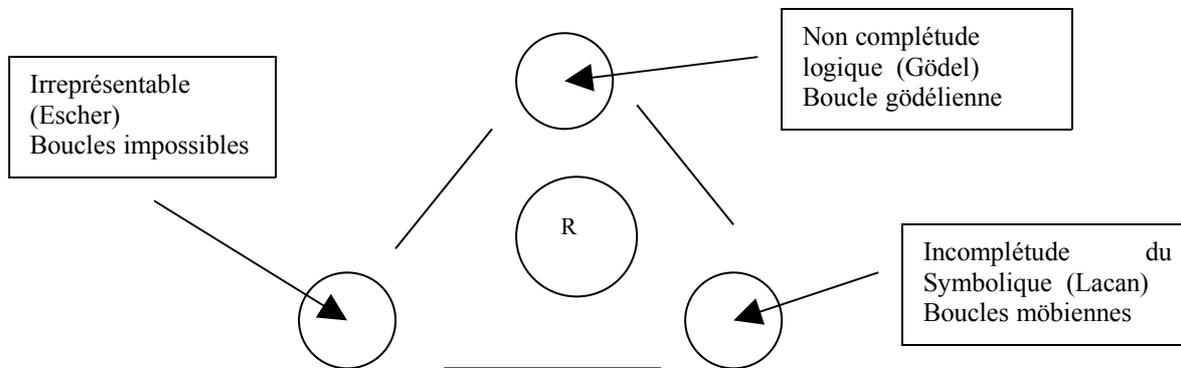
Les figurations de bandes möbiennes sont également nombreuses dans son œuvre (ici Moebius Band I et II):

¹ J. Granon-Laffont, *La topologie ordinaire de Jacques Lacan*, Point hors ligne, 1985, p. 36



Le paradoxe, chez Escher comme chez Gödel ou Lacan, intervient quand le retournement provoque l'évidence d'une absence de bouclage parfait : il existe toujours un trou central qu'il n'est pas possible de représenter (Escher), de faire entrer dans une complétude logique (Gödel) ou de symboliser (Lacan). Si on tente de colmater le trou, on tombe sur un point à l'infini qui vient signer l'échec de la tentative.

Mais notre thèse est que ces trois auteurs nous montrent le paradoxe à trois niveaux différents de la structure, même s'il existe une parfaite homologie entre ces niveaux. Reprenons le schéma du chapitre dernier, en le modifiant quelque peu.



Dans les trois cas, les zones-limite pourraient bien être structurées par l'espace de la bande de Möbius :

-pour Gödel, d'un côté se trouvent les propositions de l'arithmétique (que nous ferons relever du Symbolique) et de l'autre le chiffrement de celles-ci (relevant du Scriptal)

-pour Escher, d'un côté l'écriture des chaînes de figures (Scriptal) et de l'autre une analyse des configurations topologiques de l'espace (Imaginaire)

-pour Lacan enfin, d'un côté les chaînes de signifiants (Symbolique) et de l'autre la topologie qui soutient le sujet (Imaginaire).

La continuité qui existe entre les deux faces de la bande est intuitivement mise en évidence par Escher dans l'idée d'un serpent qui se mord la queue. Nous pouvons y faire une

lecture ponctuelle, et dans ce cas constater l'existence d'un lien synchronique entre les éléments sur avers et envers de la bande, ou y faire une lecture continue et constater le lien diachronique qui existe entre tous les éléments de la bande. Mais le paradoxe intervient quand la lecture continue débouche sur l'évidence d'un impossible bouclage, d'un incommensurable trou.

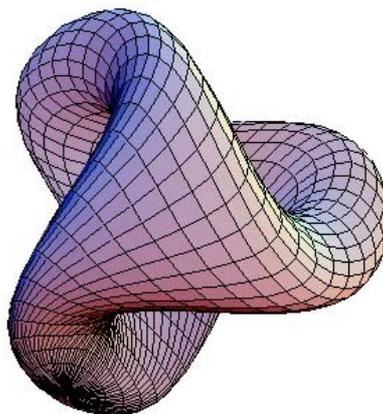
Quel peut bien être le lien, se demandera-t-on, entre les phénomènes de fractalité que nous relevons au sein des zones-limite au dernier chapitre, et la topologie möbienne ? Ce lien peut commencer à s'entrevoir dans l'itération d'un algorithme comme $z_1 = z_0^2 + C$, étudié par le mathématicien Benoît Mandelbrot. Cette boucle de feed-back donne lieu à des phénomènes chaotiques marqués par des attracteurs dits « étranges », dans la mesure où ils consistent en des fractales. Il en est de même pour la célèbre courbe de Von Koch, dont la dimension fractale est précisément 1, 26. Celle-ci est obtenue à partir de l'itération d'opérations sur une figure triangulaire de départ.

Cette équivalence n'a en tout cas pas échappée à Escher, qui a largement figuré les dimensions möbiennes et fractales dans son œuvre, même si pour ces dernières, il ne disposait pas en son temps des avancées de Mandelbrot.

Tentons maintenant un dernier pas en tâchant de serrer le substrat topologique adéquat à l'articulation des trois ordres que nous avons dégagé dans cette thèse. Nous avons identifié trois zones-limite à substrat möbien, lieux de paradoxes quant au nouage des ordres deux à deux. Par ailleurs, une zone centrale reliée aux trois ordres concerne le Réel, soit un impossible qu'il est seulement possible d'approcher asymptotiquement.

Or, il existe une structure topologique non orientable qui correspond d'assez près à ces caractéristiques. Il s'agit de la surface de Boy. Cette surface découverte par le mathématicien Werner Boy en 1902, élève de Hilbert, est une immersion du plan projectif dans notre espace à trois dimensions.

La surface de Boy peut aussi être « vue » comme une sphère dont on a recollé deux à deux les points antipodaux, ou encore un disque dont on a recollé deux à deux les points diamétralement opposés de son bord. On peut également la construire en recollant le bord d'un disque sur le bord d'un ruban de Möbius¹.

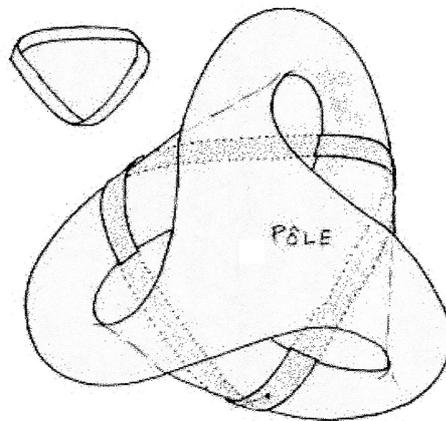


Il est important de préciser que nous ne convoquons pas cette structure topologique au hasard. Lacan lui-même s'y est intéressé, tardivement certes, mais il semble bien avoir trouvé là le support idéal pouvant rendre compte du fantasme. Le physicien Jean-Pierre Petit, en évoquant ses trois rencontres avec le maître de la rue de Lille en 1979, insiste sur le fait que

¹ voir à ce sujet A. Cochet, *Lacan géomètre*, Anthropos, 1998, p. 7

Lacan cherchait une surface unilatère munie d'un seul point singulier¹. Petit eut l'impression que la surface de Boy, qui répondait à ces exigences, était en passe d'éclipser le cross-cap dans l'esprit de Lacan, comme support du fantasme fondamental.

C'est qu'il s'agit d'une structure munie d'un seul pôle, un point triple où trois nappes se croisent, mais qui n'a pas d'existence géométrique intrinsèque. Par ailleurs, il existe une coupure possible (au sens de Lacan) de cet objet : en effet une courbe particulière fait le tour du pôle. Pour peu que l'on donne un peu d'épaisseur à cette courbe, on observe que nous avons affaire à une bande de Möbius à trois demi-torsions. La coupure réelle à l'endroit de la courbe produit bien une séparation en deux parties de la surface de Boy : d'un côté un ruban de Möbius triplement torsadé, de l'autre un disque sur lequel figure le pôle unique. Nous retrouvons donc les caractéristiques que Lacan avait pu repérer sur le cross-cap, mais nous ne sommes plus embarrassés ici par la symétrie des deux points cuspidaux attachés à ce dernier.



Qu'il nous suffise pour terminer de préciser que le modèle möbien ne remet aucunement en cause la place de la Jouissance comme phénomène fractal de bord : le bord dont il s'agit est ici spécifié comme bord unique d'une surface unilatère et vient enserrer un trou incombable, sauf à en faire mathématiquement un point à l'infini.

Il convient de ne pas nous laisser rebuter par ces homologies, mais de nous laisser porter par elles. Suivons plutôt les propos encourageants de Douglas Hofstadter : « On ne peut jamais prévoir ce que quelqu'un d'autre verra dans une idée ou dans un ensemble insolite d'idées apparentées, ni où cette intuition à peine entrevue pourra conduire avec le temps »².

Alain Cochet juin 2009

¹ JP. Petit, F. Guyot, revue *figures de la psychanalyse*, 2006/2 - n° 14, p. 181-204, Eres

² correspondances, février 2009